Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
2^{do} Examen Parcial (35 %)
Sep-Dic 2017

Turno 1-2
Duración: 1 hora 50 minutos

Respuestas

Pregunta 1. (6 ptos.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\pi - x}{\operatorname{sen}(x)}$

Solución:

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\pi - x}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(\pi - x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} = 1$$

ya que $\operatorname{sen}(\pi - x) = \underbrace{\operatorname{sen}(\pi)}_{=0} \cos(x) - \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x)$.

Pregunta 2. (6 ptos.) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{|x-2|} \right)$

Solución: Como

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & , \text{ si } x \geq 2 \\ 2-x & , \text{ si } x < 2 \end{cases}$$

y el límite tiende a 2 por la izquierda, tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{|x-2|} \right) &= \lim_{x\to 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{2-x} \right) \\ &= \lim_{x\to 2^-} \frac{2}{x-2} = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

Pregunta 3. (6 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)$

Solución: Como x tiende a $-\infty$, entonces $x=-|x|=-\sqrt{x^2}$. Así,

$$\lim_{x\to-\infty} x\left(x-\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-x}{-x}}{\left(\frac{x}{-x}+\frac{\sqrt{x^2+1}}{-x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\left(-1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\left(-1+\sqrt{1+\left(1/x\right)^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{0^+} = \infty$$

Pregunta 4. (6 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4-x^2}{3-\sqrt[3]{5x^2+7}}$

Solución:

$$\lim_{x\to 2} \frac{4-x^2}{3-\sqrt[3]{5x^2+7}} = \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)\left(3^2+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\sqrt[3]{\left(5x^2+7\right)^2}\right)}{3^3-\left(\sqrt[3]{5x^2+7}\right)^3}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(4-x^2)\left(9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\sqrt[3]{\left(5x^2+7\right)^2}\right)}{5\left(4-x^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{9+3\sqrt[3]{5x^2+7}+\sqrt[3]{\left(5x^2+7\right)^2}}{5} = \frac{27}{5}$$

Pregunta 5. (4 ptos.) Demuestre, usando la definición de límite, que $\lim\limits_{x\to 1}(2x-5) = -3$.

Solución: Dado $\epsilon > 0$ queremos hallar $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$0 < |x-1| < \delta \qquad \Longrightarrow \qquad |2x-5-(-3)| < \epsilon.$$

Como

$$|2x-5-(-3)| = |2x-2| = 2|x-1|$$

entonces $\delta = \epsilon/2$ es tal que

$$0 < |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |2x-5-(-3)| = 2|x-1| < 2\,\delta = \epsilon.$$

Pregunta 6. (5 ptos.) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-1} & , \text{ si } x < -1 \\ \left[\!\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right]\!\right] & , \text{ si } -1 < x \leq 2 \\ \dfrac{x^2-x}{x^2-2x} & , \text{ si } 2 < x \end{cases}$$

Determine los puntos en los cuales la función no es continua e indique el tipo de discontinuidad.

Solución: En $(-\infty,-1)$ la función es continua por ser algebraica explícita y todos los puntos pertenecen al dominio, ya que $-x-1 > 0$ si $x \in (-\infty,-1)$. Como el dominio de la función f es $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, ella necesariamente posee una discontinuidad en $x = -1$. Los límites laterales de f en $x = -1$ vienen dados por

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} \sqrt{-x-1} = 0 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x) &= \lim_{x\to -1^+} \left[\!\left[\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} \right]\!\right] = 0 \end{aligned}$$

y como coinciden, tenemos que $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ existe. Así, f posee una discontinuidad removible en $x = -1$. Notemos que

$$\left[\!\left[\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} \right]\!\right] = k \quad \text{si } x \in \big[-1+2k, 1+2k\big) \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

por lo que f es continua en $(-1,1)$ por ser constante en ese intervalo, posee una discontinuidad por salto en $x=1$ y es continua en $[1,2]$ por ser constante en ese intervalo. Los límites laterales de f en $x=2$ vienen dados por

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{x\to 2^-} \left[\!\left[\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2} \right]\!\right] = 1 \\
\lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-x}{x^2-2x} = \lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right) = \infty
\end{aligned}$$

por lo que f posee una discontinuidad infinita en $x=2$. En $(2,\infty)$ la función es continua por ser algebraica explícita y todos los puntos pertenecen al dominio, ya que $x^2-2x\neq 0$ si $x\in(2,\infty)$.

Pregunta 7. (2 ptos.) Si g es una función continua en $x=a$ y $f(x)=(x-a)\,g(x)$, halle $f'(a)$.

Solución: Como g es continua en $x=a$ entonces f también lo es por ser producto de funciones continuas en ese punto. Además, $f(a)=0$ y $\lim_{x\to a} g(x)=g(a)$. Luego,

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\,g(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a} g(x)=g(a).$$